

THÈME 4

ONDES ET SIGNAUX

Pierre-André LABOLLE

Lycée International des Pontonniers de Strasbourg

Novembre 2020

CHAPITRE 6 : Dynamique d'un système électrique capacitif

I. Le condensateur

1. Constitution
2. Exemples de systèmes capacitifs
3. Étude qualitative de la charge et de la décharge d'un condensateur
4. Grandeurs électriques dans un dipôle RC

II. Étude de la charge du condensateur

1. Mise en équation
2. Résolution analytique
3. Analyse dimensionnelle du produit RC

III. Étude de la décharge du condensateur

1. Mise en équation
2. Résolution analytique
3. Allure de la tension

I. Le condensateur

1. Constitution

- Il s'agit d'un composant électronique constitué de deux conducteurs métalliques, appelés armatures, séparés par un matériau isolant, appelé diélectrique.
- On le symbolise de la façon suivante : 
- Un condensateur est caractérisé par sa **capacité** C exprimée en **farads**, unité de symbole F .
- Les capacités des condensateurs usuels sont de faible valeur et on utilise souvent les sous-multiples du farad comme le millifarad (mF), le microfarad (μF), le nanofarad (nF) et le picofarad (pF).

I. Le condensateur

2. Quelques exemples d'application de systèmes capacitifs

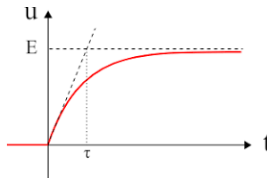
- Certains écrans tactiles dont le principe de fonctionnement est basé sur des transferts de charges électriques ;
- Minuterie pour l'éclairage d'une cage d'escalier ;
- Modélisation de la répartition des charges électriques dans un nuage d'orage ;
- Accéléromètres ;
- Jauges de niveau ;
- Certains types de microphones ;
- Mémoire vive d'ordinateur (DRAM) ;
- Filtres électroniques utilisés notamment le traitement du signal audio ;
- Système électronique de déclenchement des airbags. . .

I. Le condensateur

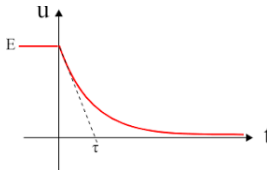
3. Étude qualitative de la charge et de la décharge d'un condensateur

- Animation présentant le comportement d'un condensateur dans un circuit dit "circuit RC" : https://sciencesphysiques.pagesperso-orange.fr/ts_charge_et_decharge_rc.swf

- Charge du condensateur : la tension aux bornes du condensateur augmente jusqu'à égaler celle du générateur.



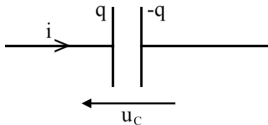
- Décharge du condensateur : la tension aux bornes du condensateur diminue jusqu'à s'annuler.



I. Le condensateur

4. Grandeurs électriques associées

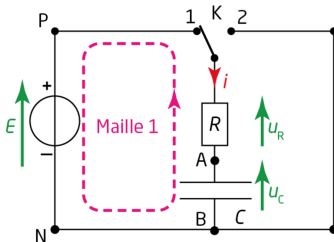
- La charge électrique portée par le condensateur est appelée q ; elle s'exprime en coulombs de symbole C.
- Cette charge électrique q est proportionnelle à la tension électrique u_C aux bornes du condensateur ; le coefficient de proportionnalité est appelé **capacité** du condensateur. De cette manière, nous avons, à chaque instant, la relation $q = C \times u_C$
- L'intensité i du courant dans le circuit correspond au **débit des charges électriques** dans le circuit, autrement dit, à la charge électrique qui circule dans le circuit par unité de temps. En régime variable, on a donc $i = \frac{dq}{dt}$
- Autrement dit, l'intensité du courant électrique est égale à la dérivée de la charge électrique par rapport au temps.
- Ainsi, durant la charge du condensateur, $i > 0$ car q augmente alors que durant la décharge, $i < 0$ car q diminue.
- Pour appliquer avec rigueur les lois de l'électricité dans les circuits (loi des mailles notamment), on retiendra la convention de notation suivante :



II. Étude de la charge du condensateur

1. Mise en équation

- On considère le circuit suivant dans lequel le condensateur est initialement déchargé et dans lequel on bascule, à la date $t = 0$ l'interrupteur K sur la position 1.



- D'après la loi des mailles dans la maille numérotée 1 sur le schéma, on obtient :
$$u_C + u_R - E = 0$$
- Or d'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$ et nous avons vu que $i = \frac{dq}{dt}$ d'où
$$u_R = R \times \frac{dq}{dt}$$
- Nous avons aussi vu que $q = C \times u_C$ où C est une constante (la capacité du condensateur). Ainsi, $\frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$

II. Étude de la charge du condensateur

1. Mise en équation

- La loi des mailles appliquée dans la maille 1 devient alors l'équation suivante :

$u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} - E = 0$ ce qui peut encore s'écrire de la façon suivante :

$$\boxed{u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} = E} \quad (1)$$

- On retrouve ici une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et second membre constant pour la tension u_C aux bornes du condensateur.
- La résolution de cette équation différentielle se mènera de la même manière que ce que nous avons vu en thermodynamique.

II. Étude de la charge du condensateur

2. Résolution analytique

- D'après ce que nous avons déjà vu, les solutions de cette équation sont de la forme

$$\boxed{u_C = A + B \times e^{-\frac{t}{\tau}}} \text{ où } A, B \text{ et } \tau \text{ sont des constantes à déterminer.}$$

- ① Cette fonction u_C doit vérifier l'équation (1). Or $\frac{du_C}{dt} = -\frac{B}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ainsi, en reportant dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} &= E \\ \left(A + B \times e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + R \times C \times \left(-\frac{B}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}} \right) &= E \\ A + B \times \left(1 - \frac{R \times C}{\tau} \right) \times e^{-\frac{t}{\tau}} &= E \end{aligned} \quad (2)$$

Cette relation doit être vraie quelle que soit la date t considérée. Or A et E étant des constantes, le terme dépendant du temps doit être nul. Par ailleurs, $B \neq 0$ car sinon, la tension aux bornes du condensateur serait constante, ce qui n'est pas le cas. En outre, la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

La seule possibilité est donc $\left(1 - \frac{R \times C}{\tau} \right) = 0$ soit $\boxed{\tau = R \times C}$

Par conséquent, l'équation (2) devient $A = E$

II. Étude de la charge du condensateur

2. Résolution analytique

- ② D'après ce qui précède, nous avons donc $u_C = E + B \times e^{-\frac{t}{RC}}$

De plus, à l'instant initial $t = 0$, le condensateur est déchargé donc la tension aux bornes du condensateur est nulle à cette date, soit $u_C(t = 0) = 0$

On obtient alors $E + B \times e^{-\frac{0}{RC}} = 0$ soit $E + B = 0$ d'où $B = -E$

- ③ Pour conclure, on obtient donc $u_C = E - E \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ et en factorisant, il vient

$$u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{où} \quad \tau = RC$$

II. Étude de la charge du condensateur

3. Analyse dimensionnelle du produit RC

- Pour cette analyse dimensionnelle, nous allons utiliser deux dimensions que sont la tension électrique U et l'intensité du courant I .

D'après la loi d'Ohm, nous savons que $u_R = R \times i$ d'où $[u_R] = [R] \times [i]$. On a donc $[R] = \frac{U}{I}$

- Par ailleurs, nous savons que $i = \frac{dq}{dt}$ d'où $[i] = \frac{[q]}{[t]}$. On a donc $I = \frac{[q]}{T}$ ou encore $[q] = I \times T$

Nous savons aussi que $q = C \times u_C$ d'où $[q] = [C] \times [u_C]$ soit $[q] = [C] \times U$ ou encore $[C] = \frac{[q]}{U}$

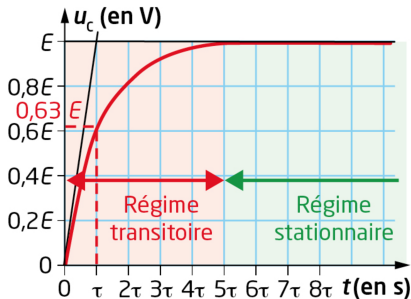
- D'après ce qui précède, nous avons donc $[C] = \frac{I \times T}{U}$

Enfin, il vient $[RC] = \frac{\cancel{U}}{\cancel{U}} \times \frac{\cancel{I} \times T}{\cancel{I}} = T$

II. Étude de la charge du condensateur

3. Analyse dimensionnelle du produit RC

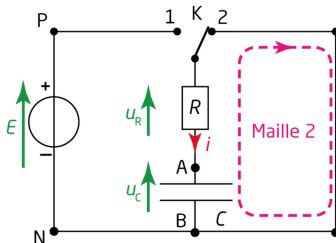
- Le produit RC a donc la dimension d'une durée. Il s'agit de la durée caractéristique de l'évolution temporelle du circuit lors de la charge du condensateur.
- On appelle constante de temps du dipôle RC la grandeur $\tau = RC$
- Après une durée égale à $5 \times \tau$, le condensateur est chargé à 99%
- On peut donc considérer que la charge du condensateur est terminée au bout d'une durée de $5 \times \tau$
- Cette constante de temps peut se déterminer graphiquement de deux manières différentes :



III. Étude de la décharge du condensateur

1. Mise en équation

- On considère le circuit suivant dans lequel le condensateur est initialement chargé sous une tension E et dans lequel on bascule, à la date $t = 0$ l'interrupteur K sur la position 2.



- D'après la loi des mailles dans la maille numérotée 2 sur le schéma, on obtient :
 $u_C + u_R = 0$
- Comme nous l'avons lors de la charge du condensateur, on a $u_R = R \times \frac{dq}{dt}$
- Nous avons aussi vu que $\frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$ donc $u_R = RC \times \frac{du_C}{dt}$

III. Étude de la décharge du condensateur

1. Mise en équation

- La loi des mailles appliquée dans la maille 2 devient alors l'équation suivante :

$$u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0$$

- On retrouve ici une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et sans second membre pour la tension u_C aux bornes du condensateur.
- Cette équation peut aussi s'écrire $u_C = -\tau \times \frac{du_C}{dt}$ où $\tau = RC$

II. Étude de la décharge du condensateur

2. Résolution analytique

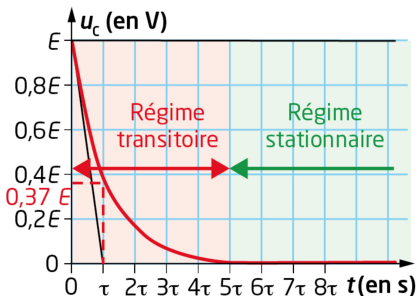
- Les solutions à l'équation différentielle $u_C = -\tau \times \frac{du_C}{dt}$ sont de la forme $u_C = A \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ où A est une constante à déterminer.
- Or nous savons par hypothèse que le condensateur est initialement chargé sous la tension E à l'instant initial.
- Or $u_C(t=0) = A \times e^{-\frac{0}{\tau}} = A$
- On en déduit la valeur de la constante $A = E$
- Pour conclure, on obtient l'expression de la tension aux bornes du condensateur

$$\boxed{u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}}} \text{ où } \boxed{\tau = RC}$$

II. Étude de la décharge du condensateur

3. Allure de la tension aux bornes du condensateur

- On remarque que la constante de temps lors de la décharge est la même que lors de la charge du condensateur.
- Après une durée égale à $5 \times \tau$, le condensateur est déchargé à 99%
- On peut donc considérer que la décharge du condensateur est terminée au bout d'une durée de $5 \times \tau$
- Cette constante de temps peut se déterminer graphiquement de deux manières différentes :



EXERCICES :

PP491-503 n°21, 39, 40 et 46