

24] a) Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, le ballon n'est soumis qu'à son poids si l'on néglige les frottements de l'air et la poussée d'Archimède. D'après la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \times \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \times \vec{a}$$

$$\cancel{m} \times \vec{g} = \cancel{m} \times \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Sur l'axe (Ox) : $\ddot{x} = 0$

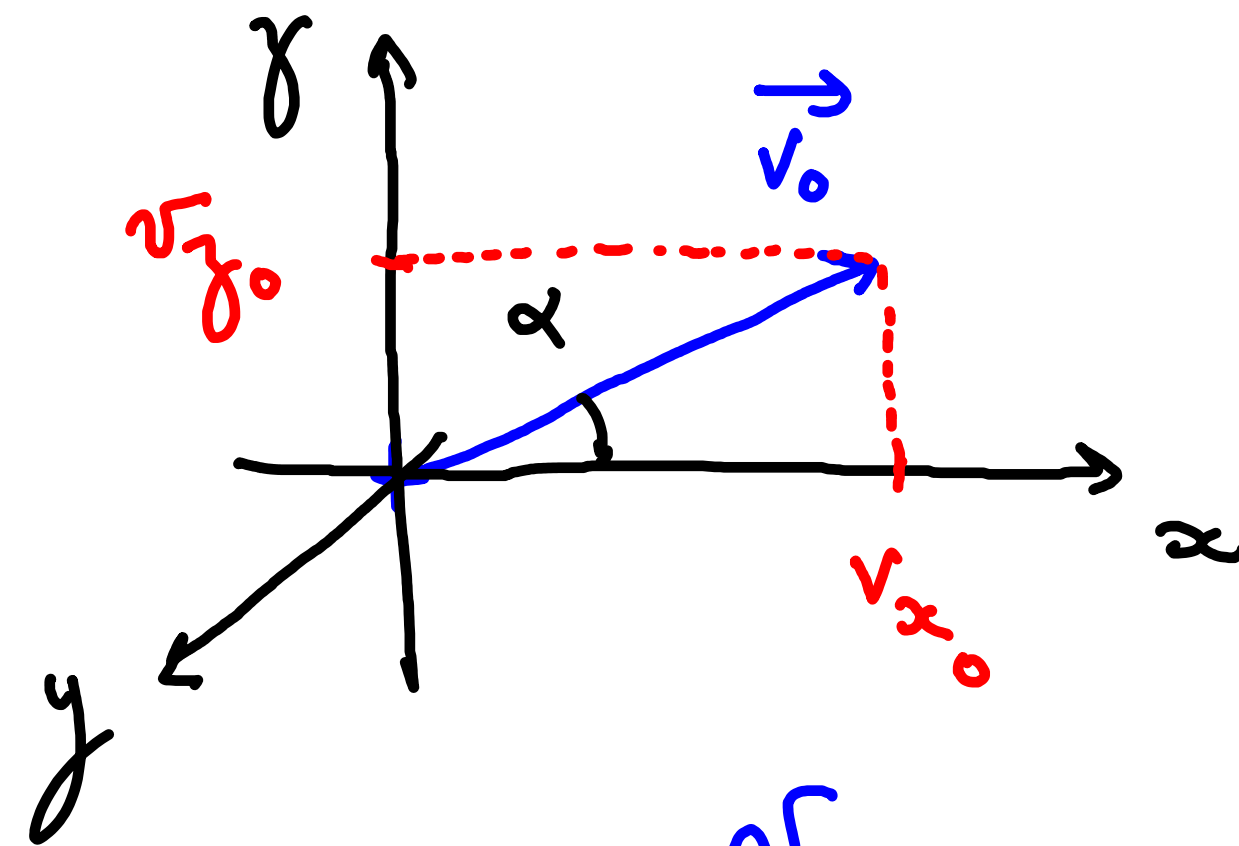
$$v_x = \dot{x} = v_{x_0}$$

$$v_x(t) = v_0 \times \cos \alpha$$

$$x(t) = (v_0 \times \cos \alpha) \times t + x_0$$

or $x_0 = 0$ car le ballon est
à la verticale de l'origine
à $t = 0$

$$x(t) = (v_0 \times \cos \alpha) \times t$$



$$\bullet \cos \alpha = \frac{v_{x_0}}{v_0}$$

$$v_{x_0} = v_0 \times \cos \alpha$$

$$\bullet \sin \alpha = \frac{v_{y_0}}{v_0}$$

$$v_{y_0} = v_0 \times \sin \alpha$$

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_0 \times \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \times \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Sur l'axe (Oy) :

$$\ddot{y} = 0$$

$$v_y = \dot{y} = v_{y_0} = 0$$

$$\boxed{v_y(t) = 0}$$

$y(t) = y_0 = 0$ car le ballon se trouve à la verticale de l'origine à $t=0$.

$$\boxed{y(t) = 0}$$

le mouvement est plan
(contenu dans le plan (xOz))

Sur l'axe (Oz) :

$$\ddot{z} = -g$$

$$v_z = \dot{z} = -g \times t + v_{z0} = -g \times t + v_0 \times \sin \alpha$$

$$v_z(t) = -g \times t + v_0 \times \sin \alpha$$

$$z(t) = -g \times \frac{1}{2} \times t^2 + (v_0 \times \sin \alpha) \times t + z_0$$

or $z_0 = H$ d'où

$$z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + (v_0 \times \sin \alpha) \times t + H$$

b) Méthode avec les équations horaires :

Soit t_p l'instant où le ballon atteint une abscisse D . On a

$$x(t_p) = (v_0 \times \cos \alpha) \times t_p = D$$

$$t_p = \frac{D}{v_0 \times \cos \alpha}$$

Altitude atteinte par le ballon à l'instant t_p :

$$z(t_p) = -\frac{1}{2} g \times t_p^2 + (v_0 \sin \alpha) \times t_p + H = h$$

$$-\frac{1}{2} g \times \frac{D^2}{v_0^2 \times \cos^2 \alpha} + \cancel{v_0} \times \sin \alpha \times \frac{D}{\cancel{v_0} \times \cos \alpha} + H = h$$

$$- \frac{1}{2} \times g \times \frac{D^2}{v_0^2 \times \cos^2 \alpha} = h - H - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times D = h - H - D \tan \alpha$$

$$- \frac{1}{2} g \times \frac{D^2}{v_0^2 \times \cos^2 \alpha} = h - H - D \tan \alpha$$

$$\frac{- 2 v_0^2 \times \cos^2 \alpha}{g \times D^2} = \frac{1}{h - H - D \tan \alpha}$$

$$- 2 \times v_0^2 \times \cos^2 \alpha = \frac{g \times D^2}{h - H - D \tan \alpha}$$

$$2 v_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{g \times D^2}{D \tan \alpha + H - h}$$

$$v_0^2 = \frac{g \times D^2}{2 \times \cos^2 \alpha \times (D \tan \alpha + H - h)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \times D^2}{2 \times \cos^2 \alpha \times (D \times \tan \alpha + H - h)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,81 \times 4,60^2}{2 \times \cos^2 45 \times (4,60 \times \tan 45^\circ + 2,50 - 3,05)}} = 7,2 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_0 = 26 \text{ km.h}^{-1}$$

b) Méthode avec l'équation de la trajectoire $z(x)$:

$$x(t) = (v_0 \times \cos \alpha) \times t$$

$$\text{d'où } t = \frac{x}{v_0 \times \cos \alpha}$$

$$\text{Or } z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + (v_0 \times \sin \alpha) \times t + H$$

$$z = -\frac{1}{2} g \times \frac{x^2}{v_0^2 \times \cos^2 \alpha} + \frac{\cancel{v_0} \times \sin \alpha \times \cancel{x}}{\cancel{v_0} \times \cos \alpha} + H$$

$$z = -\frac{g \times x^2}{2 \times v_0^2 \times \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha) \times x + H$$

Le panier est marqué si $z(D) = h$

$$h = - \frac{g \times D^2}{2 \times v_0^2 \times \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha) \times D + H$$

$$h - H - D \times \tan \alpha = - \frac{g \times D^2}{2 \times v_0^2 \times \cos^2 \alpha}$$

$$H + D \times \tan \alpha - h = \frac{g \times D^2}{2 \times v_0^2 \times \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{2 \times v_0^2 \times \cos^2 \alpha}{g \times D^2} = \frac{1}{H + D \times \tan \alpha - h}$$

$$v_0^2 = \frac{g \times D^2}{2 \times \cos^2 \alpha \times (H + D \tan \alpha - h)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \times D^2}{2 \times \cos^2 \alpha \times (H + D \tan \alpha - h)}}$$